

Simulación numérica de cortafuegos en incendios forestales



Universidad de Concepción

Ponencia Elvis Gavilán
Facultad de Ciencias Forestales, UdeC, Chile

Find the next number of the sequence

1, 3, 5, 7, ?

Correct solution

217341

because when

$$f(x) = \frac{18111}{2}x^4 - 90555x^3 + \frac{633885}{2}x^2 - 452773x + 217331$$

$$f(1)=1$$

$$f(2)=3$$

much solution

$$f(3)=5$$

wow very logic

$$f(4)=7$$

$$f(5)=217341$$

such function

many maths

wow



Contenidos

- 1 Introducción
- 2 Un modelo de EDP's para incendios forestales
- 3 Método numérico utilizado
- 4 Primeros ejemplos numéricos
- 5 Ejemplos prácticos
- 6 Trabajo futuro
- 7 Referencias

Una ecuación diferencial ordinaria **EDO** es una ecuación cuya solución está determinada por una función de una variable.

Ejemplos:

- $y_1(x) = e^{2x}$, $y_2(x) = e^{3x}$ e $y_3(x) = 2y_1(x) + 7y_2(x)$ son soluciones de la EDO $y'' - 5y' + 6y = 0$.
- $y_1(x) = \cos(2x)$, $y_2(x) = \sin(2x)$ e $y_3(x) = 3y_1(x) + 11y_2(x)$ son soluciones de la EDO $y'' + 4y = 0$.

Algunos características:

- Las aplicaciones de las EDO's abarcan varias áreas del conocimiento tales como Biología, Economía, Física y Química.
- Existen teoremas que permiten establecer en ciertas EDO's la existencia y unicidad de soluciones.
- En *algunos casos* resulta poco práctico encontrar soluciones de manera algebraica y es que entonces surge la importancia de trabajar con métodos numéricos de modo de encontrar aproximaciones a dichas soluciones.

Un caso práctico: La ley de enfriamiento de Newton establece que la temperatura T de un cuerpo enfriándose está dada por

$$T'(t) = -k(T - T^*),$$

donde T^* es la temperatura del medio que lo rodea y C y k constantes. Al resolver esta ecuación se obtiene que $T(t) = Ce^{-kt} + T^*$.

Ejemplo: El cuerpo sin vida de una persona fue encontrado a las 13:00 horas se le tomó la temperatura, siendo ésta de $32^\circ C$. Dos horas después la temperatura se registró nuevamente y fue de $29^\circ C$. La temperatura de la habitación donde se encontraba el cadáver era constante y de $28^\circ C$. Considerando que la temperatura de un cuerpo en *estado normal* es de $36^\circ C$, ¿a qué ocurrió el deceso?

- $T(0) = C + 28 = 32 \Rightarrow C = 4$.
- $T(2) = 4e^{-2k} + 28 = 29 \Rightarrow e^{-2k} = \frac{1}{4} \Rightarrow k = \ln(2)$.
- $T(t_a) = 36 \Rightarrow 4e^{-\ln(2) \cdot t_a} + 28 = 36 \Rightarrow t_a = -1$.

Una ecuación diferencial parcial EDP es una ecuación cuyas soluciones están determinadas por funciones de varias variables.

Ejemplo: $u(x, y) = x^3y^4$ es una solución de la EDP

$$2\frac{\partial u}{\partial x} + 3\frac{\partial u}{\partial y} = 12x^3y^3 + 6x^2y^4.$$

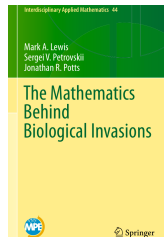
La aplicación de las EDP's es también muy amplia, sin embargo a diferencia de las EDO's, lo usual es que las EDP's sean muy difíciles de resolver de manera analítica y es por esta razón que una manera para trabar con modelos asociado a ellas sean los métodos numéricos los cuales pueden implementarse en Matlab, Octave, Python, R, etc.

Algunos sistemas de ED's permiten modelar:

- Enfermedades infecciosas (epidemias)
- Modelos predador-presa
- Formación de patrones



- Invasiones biológicas



Ejemplos:

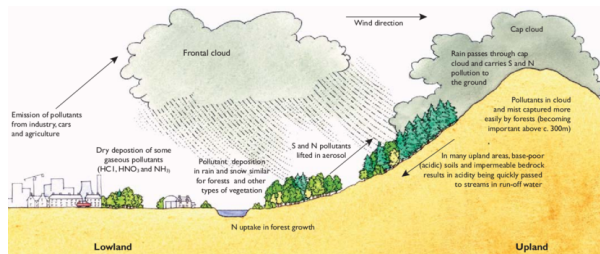
- Un modelo para el gusano de las yemas del abeto en el bosque, con $S(t) :=$ superficie total de árboles y $E(t) :=$ reserva de energía de los árboles, es el dado por las ecuaciones

$$\dot{S} = r_S S \left(1 - \frac{S}{K_S} \frac{K_E}{E} \right), \quad \dot{E} = r_E E \left(1 - \frac{E}{K_E} \right) - P \frac{B}{S}$$

- El modelo $\frac{\partial P}{\partial t} = \mathcal{D} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \alpha P \left(1 - \frac{P}{K} \right) - \beta \frac{P^2}{H^2 + P^2}$ donde \mathcal{D} es la tasa de dispersión, $P(x, t)$ es la densidad de población en un momento y lugar determinados, α , β y K son constantes, corresponde al efecto de pequeños animales en la dispersión de bellotas.



■ Agotamiento y depósito de aerosoles en los bosques



$$\frac{\partial c}{\partial t} = \nabla \cdot (K \nabla c) - \nabla \cdot (U c) - r_d + Q$$

$c(x, z, D_P)$: concentración de partículas en aerosol

$D_p, Q(x, z, D_P)$: fuerza geológica o fuentes biológicas en el bosque

$r_d(x, z, D_P)$: tasa de deposición por unidad de volumen de bosque

$u(x, z)$: vector de velocidad del viento

$K(x, z)$: tensor de difusividad turbulenta para la masa de partículas

En esta presentación se pretende simular el *comportamiento* del fuego en un incendio forestal por medio del sistema de ecuaciones diferenciales parciales siguiente:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{w}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla u = \nabla \cdot (K(u) \nabla u) + f(u, v, \mathbf{x}),$$
$$\frac{\partial v}{\partial t} = g(u, v).$$

bajo las siguientes consideraciones:

- La variable $u = u(x, y, t)$ determina la temperatura en un instante t del tiempo y en un punto (x, y) del plano.
- La variable $v = v(x, y, t)$ determina el combustible. Durante la combustión, el combustible se hace decrece y entonces se supone la fracción de masa del combustible está entre los valores 0 y 1.
- Los operadores ∇ y $\nabla \cdot$ están asociados a las variables espaciales.

└ Un modelo de EDP's para incendios forestales

- **Combustión:** Los principales componentes de la madera y otras plantas son la lignina y la celulosa, que reaccionan con el oxígeno bajo la formación de monóxido y dióxido de carbono.
- **Explosión del fuego:**
 - **Fase 1:** La ignición comienza debido al contacto de la llama con el combustible.
 - **Fase 2:** Propagación y el aumento de las llamas.
 - **Fase 3:** Formación de un anillo de fuego, donde el combustible en el centro se quema y la temperatura de la llama disminuye.
 - **Fase 4:** Si hay viento y, según sea el caso, pendiente, el fuego crece y comienza el incendio forestal.
- **Conducción del calor:** Se entiende como transferencia de calor dentro de un cuerpo o entre diferentes cuerpos por contacto directo.

└ Un modelo de EDP's para incendios forestales

■ **Difusión:** Ley de Fick

$$j_d = -D\nabla T, D > 0$$

donde j_d es flujo difusivo, D coeficiente de difusión y T temperatura.

■ **Convección:** Ocurre debido al transporte de gases y obedece la ley

$$j_c = vT,$$

donde j_d es el flujo convectivo y v la velocidad del gas.

■ **Tasa de reacción:** determina la velocidad de combustión y según la ecuación de Arrhenius, está dada por

$$r = A \exp\left(-\frac{E_A}{RT}\right),$$

donde A es el factor de reacción, E_A denota la energía de activación y R es la constante universal de los gases ideales.

└ Un modelo de EDP's para incendios forestales

Teniendo en cuenta la **conservación de masa** determinada por expresión

$$\int_{\Omega} \rho dV = m,$$

con Ω un cierto dominio espacial, ρ densidad, dV elemento de volumen y m la masa del combustible, obtiene que

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega} \rho dV \right) = \frac{dm}{dt} = 0,$$

donde $\frac{d}{dt}$ denota la derivada total con respecto al tiempo.

Al considerar el **cambio de masa en el balance de volumen** como

$$\frac{\partial m_i}{\partial t} = \rho dV \frac{\partial Y_i}{\partial t},$$

donde m_i es el elemento de masa, i el número de elementos de masa e Y_i la fracción de masa de combustible correspondiente al elemento de masa, de aquí y del equilibrio del suministro de combustible se obtiene que

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = -Yr. \quad (\text{Ec. 1})$$

└ Un modelo de EDP's para incendios forestales

El **balance de energía** puede ser caracterizado por:

- La energía térmica en Ω es $\int_{\Omega} \rho c T \, dV$, donde c es la capacidad calorífica,
- el flujo de energía térmica a través de $\partial\Omega$ es $\int_{\partial\Omega} j \cdot n \, dS$, donde j es el flujo térmico,
- la energía térmica en Ω generada por la reacción s en el tiempo t es $\int_{\Omega} s \, dV$,

en donde:

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega} \rho c T \, dV \right) = - \int_{\partial\Omega} j \cdot n \, dS + \int_{\Omega} s \, dV.$$

└ Un modelo de EDP's para incendios forestales

Aplicando el Teorema de Gauss y Teorema de localización, se obtiene la EDP:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c v \cdot \nabla T - \nabla \cdot (-q + k \nabla T) = -Q - h(T - T_{\infty}),$$

donde

ρ : densidad	v : velocidad del viento
c : capacidad calorífica	q : flujo de calor no lineal
T : Temperatura	k : conductividad térmica
t : tiempo	Q : calor liberado
T_{∞} : temperatura ambiente	h : coeficiente de convección

y una variación de ella está dada por

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c v \cdot \nabla T - \nabla \cdot ((k + 4\sigma \delta T^3) \nabla T) = -Q - h(T - T_{\infty}), \quad (\text{Ec. 2})$$

└ Método numérico utilizado

Dado que la primera ecuación del modelo gobernante corresponde a una EDP de convección-reacción-difusión,

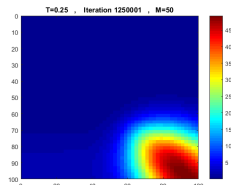
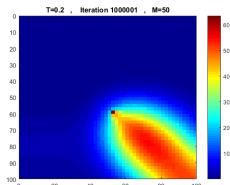
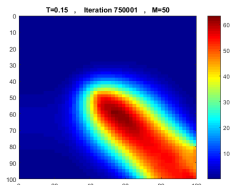
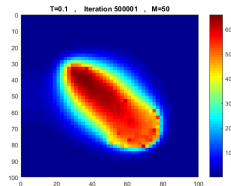
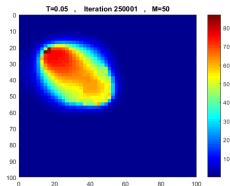
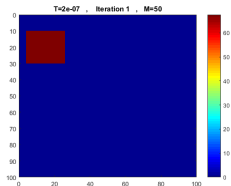
$$\frac{dv}{dt} = \Phi^*(v) + \Phi(v) = C_h(v) + D_h(v) + S_h(v)$$

desde un punto de vista computacional el tratamiento del modelo corresponde a un esquema IMEX Runge-Kutta (IMEX-RK), el cual a grandes rasgos puede describirse de la manera siguiente:

- Se ha combinado un esquema Runge-Kutta con otros métodos.
- El término convectivo se ha tratado mediante un esquema WENO.
- El término difusivo se ha tratado mediante diferencias finitas.
- El término difusivo $\Phi := D_h$ se ha tratado de manera implícita.
- Los términos convectivo y reactivo $\Phi^* := C_h + S_h$ se han tratado de manera explícita.

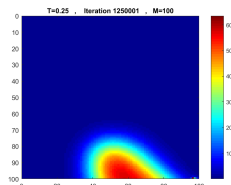
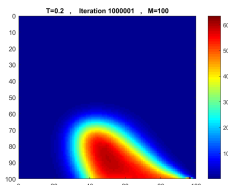
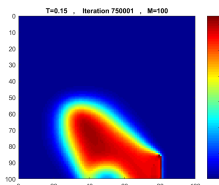
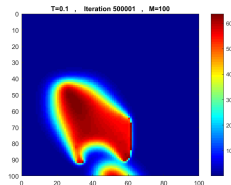
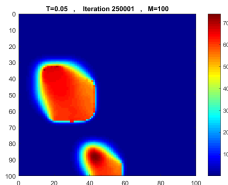
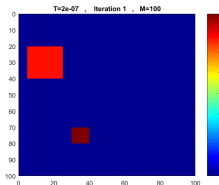
└ Primeros ejemplos numéricos

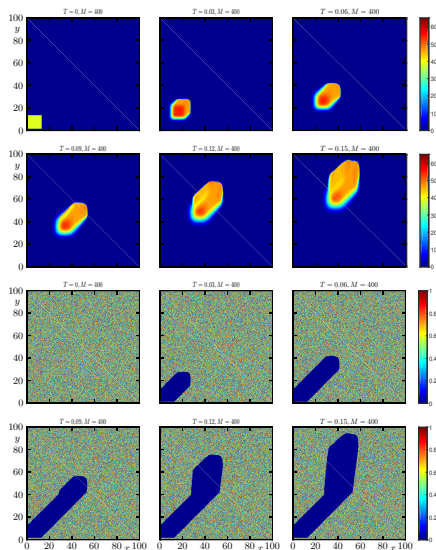
Ejemplo 1: $\vec{v} = (300, 300)$, $u_0(x, y) = 48(|(x - 15)| \leq 10) \cdot (|(y - 20)| \leq 10)$,
 $v_0(x, y) = 0.28$

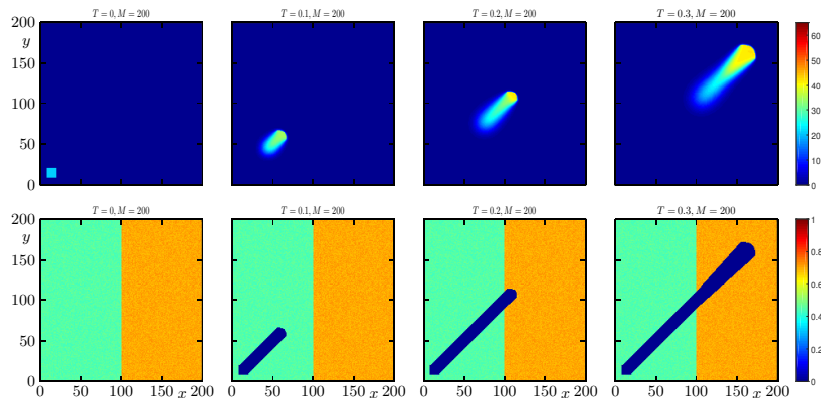


└ Primeros ejemplos numéricos

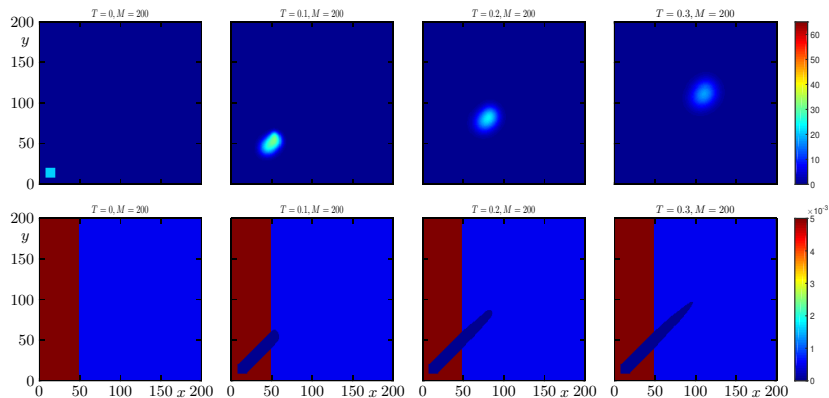
Ejemplo 2: $\vec{v} = (250, 150)$, $u_0(x, y) = 32(|x - 15| \leq 10) * (|y - 30| \leq 10) + 36 * (|x - 35| \leq 5) * (|y - 75| \leq 5)$, $v_0(x, y) = 0.5$,

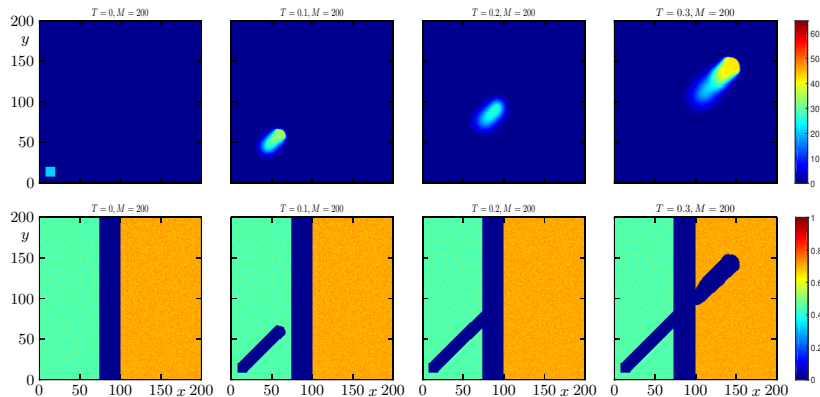


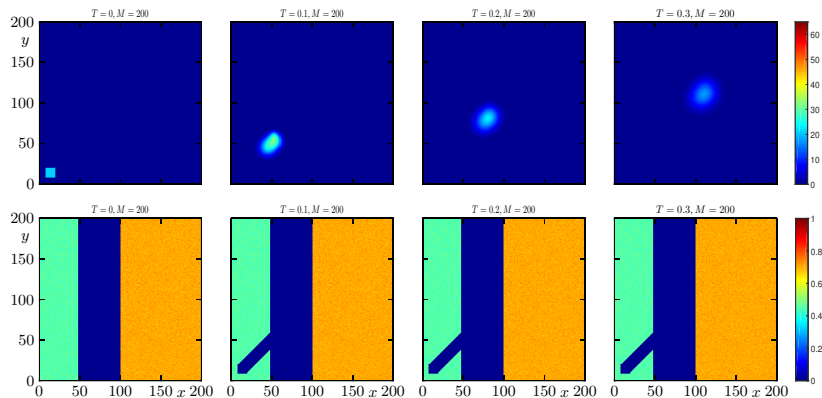
Ejemplo 3: Efecto en la propagación por cambio en la dirección del viento

Ejemplo 4.1: Propagación un terreno con dos densidades de combustible

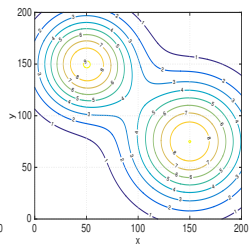
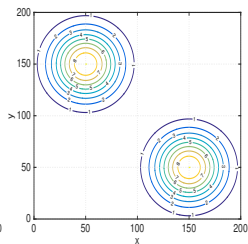
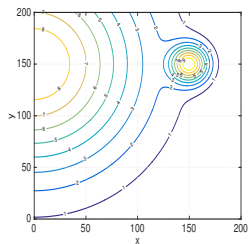
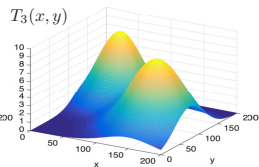
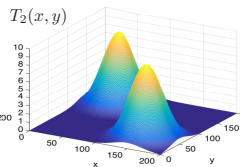
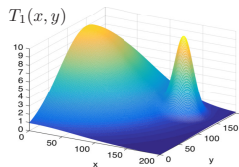
Ejemplo 4.2: Identificación de la longitud del ancho de un cortafuegos



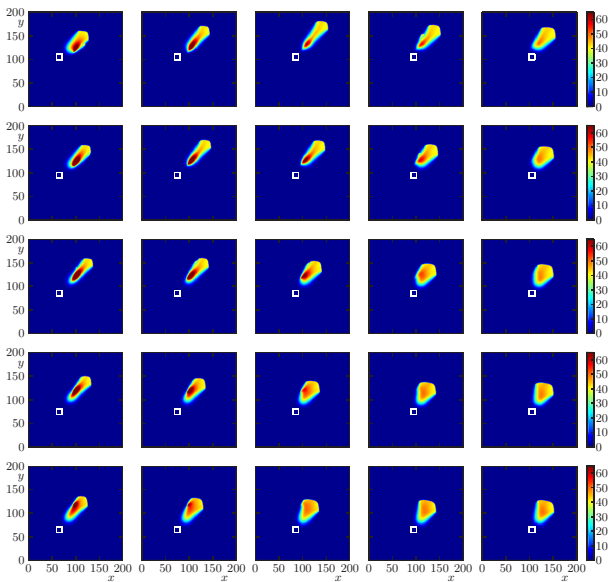
Ejemplo 4.3: Cortafuegos con un ancho longitud aún insuficiente

Ejemplo 4.4: Cortafuegos con un ancho longitud adecuada

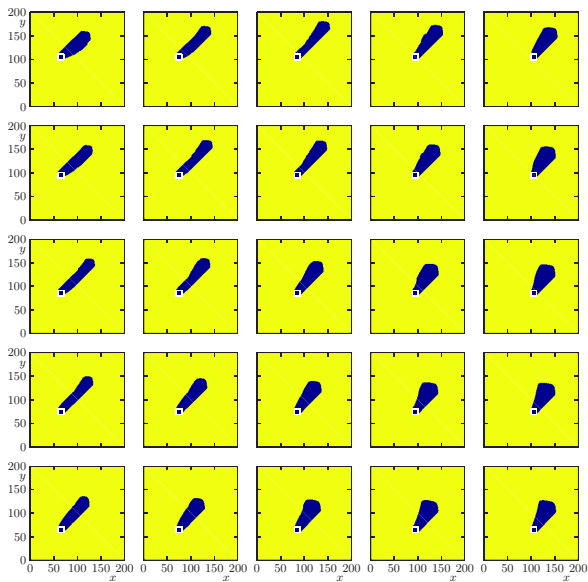
Ejemplo 5: Mapas de riesgo



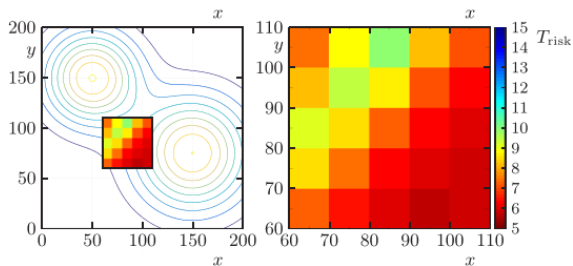
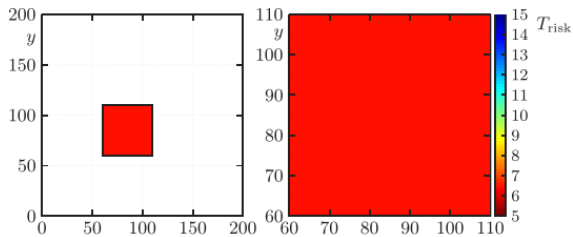
Ejemplos prácticos



Ejemplos prácticos









Ejemplos prácticos



- Consideración de no homogeneidades teniendo distintos tipos de terrenos o cortafuegos.



- Ajuste a terreno no plano
- Mejora del modelo de combustión y transferencia del calor (entalpía)
- Calibración de parámetros

-  R. Bürger, E. Gavilán, D. Inzunza, P. Mulet, L.M. Villada, Implicit-explicit methods for a convection-diffusion-reaction model of the propagation of forest fires. *Mathematics* **2020**, 8 (6), article 1034.
-  D. Barovik, V. Taranchuk, Mathematical modelling of running crown forest fires, *Math. Model. Anal.* 15 (2010) 161–174.
-  L. Ferragut, M.I. Asensio, S. Monedero, A numerical method for solving convection-reaction-diffusion multivalued equations in fire spread modelling, *Adv. Engrg. Software* 38 (2007) 366–371.
-  E. Pastor, L. Zárata, E. Planas, J. Arnaldos, Mathematical models and calculation systems for the study of wildland fire behaviour, *Progr. Energy Combust. Sci.* 29 (2003) 139–153.
-  J. Bebernes, D. Eberly, *Mathematical Problems from Combustion Theory*, Springer Verlag, New York 1989.
-  D.A. Frank-Kamenetskii, *Diffusion and Heat Transfer in Chemical Kinetics*, Princeton University Press, 1955.